



Universidade Federal
de Campina Grande



Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC
EDITAL 09/2017

TÍTULO DO PROJETO:

**Teoria de Kaluza-Klein, Dimensões Extras Compactas
e Aplicações na Mecânica Quântica**

Maio / 2017

INTRODUÇÃO

A busca pela unificação entre as interações fundamentais da natureza se tornou o Santo Graal dos físicos teóricos durante as últimas décadas. Resumidamente, esta teoria unificaria as quatro forças fundamentais da natureza até então conhecidas pela física, a saber: Gravitacional, Eletromagnética, Nuclear Forte e Nuclear Fraca, em uma única teoria que daria conta de explicar todos os fenômenos da natureza.

Albert Einstein foi um dos primeiros a propor a ideia de uma teoria de unificação entre as interações fundamentais da natureza. Em 1916 Einstein acabara de mostrar ao mundo, por meio da Teoria da Relatividade Geral [27,29,31], que a gravidade deixava de ser vista como uma força e passava a ser considerada como pura propriedade geométrica do espaço-tempo. Segundo ele, a teoria eletromagnética de Maxwell também poderia ser escrita como propriedade da geometria do espaço-tempo. Desta forma seria possível desenvolver uma teoria de unificação das interações gravitacional e eletromagnética. Apesar de todo o esforço empregado nesta tentativa, Einstein não obteve êxito em seus planos [4,5,17].

Apenas alguns anos após a publicação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, um matemático alemão conhecido por Theodor Kaluza, propôs a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein postulando em sua teoria a existência de uma dimensão extra do espaço-tempo. Para Kaluza, o espaço-tempo seria composto por cinco dimensões, quatro dimensões espaciais e uma dimensão temporal [8, 17, 19]. Posteriormente, em 1926, esta teoria sofreu algumas alterações que foram propostas pelo físico sueco Oscar Klein o qual forneceu uma hipótese física para justificar o fato desta quinta dimensão não ser observada. Segundo Klein, a quinta dimensão possui a topologia de um círculo de raio l , e que a magnitude deste raio é da ordem do comprimento de escala de Planck 10^{-35} m. Sendo l desta magnitude, a dimensão extra se torna indetectável dentro da escala de energia disponível atualmente. Esta teoria passa a ser conhecida então como teoria de Kaluza-Klein [1,2].

Com o passar dos anos mais duas interações fundamentais foram descobertas, as interações nuclear fraca e nuclear forte. A interação nuclear fraca é responsável por certos tipos de decaimentos radioativos, enquanto que a interação nuclear forte mantém os prótons presos no interior dos átomos. Logo após a descoberta dessas duas interações, novas teorias de dimensões extras surgiram na tentativa de unificar agora as quatro forças fundamentais da natureza. Estas novas teorias de dimensões extras são mais conhecidas como modelos de branas e nestes modelos o Universo observável é considerado como uma hipersuperfície de

4+1 dimensões (brana), onde todos os campos de gauge com exceção da gravidade estão confinados na hipersuperfície por meio de um mecanismo de aprisionamento da matéria na brana devido a interação dos campos de gauge com o campo escalar gerador da brana. Esta hipersuperfície estaria inserida em um universo dimensionalmente superior, denominado de espaço ambiente. Sob esta perspectiva, o espaço-tempo ordinário seria, então, uma espécie de ‘membrana’ imersa num espaço com dimensões extras [6-12].

Neste trabalho, como forma de introduzir o aluno ao tema, pretendemos estudar o modelo de dimensões extras compactas, mais precisamente o modelo de Kaluza-Klein, verificando quais são as influências geradas por uma teoria desse tipo nos fenômenos físicos. Por razões de simplicidade, buscaremos atingir nosso objetivo investigando o funcionamento destes mecanismos quando aplicados a um campo escalar real como, por exemplo, o campo de Klein-Gordon. Além disto, desejamos conhecer os efeitos que uma teoria de dimensão extra compacta gera nos problemas clássico da mecânica quântica, tal como o poço de potencial.

OBJETIVOS

Geral

No presente trabalho pretendemos estudar a Teoria de Kaluza-Klein que é uma teoria bem conhecida entre os modelos de dimensões extras existentes na literatura. Queremos, portanto, estudar qual é o mecanismo utilizado por esse modelo para justificar a ausência de traços fenomenológicos de uma dimensão extra nos fenômenos físicos. Verificaremos o funcionamento deste mecanismo analisando a sua atuação sobre um campo escalar de Klein-Gordon definido num espaço-tempo em cinco dimensões, bem como os efeitos de uma teoria de dimensão extra compacta sobre os problemas da mecânica Quântica. Além disso, desejamos verificar como essa teoria consegue por meio de introdução de uma dimensão extra no espaço-tempo unificar a força eletromagnética com a força gravitacional.

Específicos

Especificamente esperamos que, ao final do estudo proposto, o aluno possa atingir os seguintes objetivos:

1. Compreender os conceitos da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein.

2. Escrever a equação de Klein-Gordon num espaço-tempo munido de uma métrica Lorentziana arbitrária.
3. Distinguir os efeitos de uma dimensão extra compacta na teoria da Relatividade Restrita.
4. Entender como dimensões extras compactas influenciam no comportamento de partículas quânticas.
5. Empregar o método de expansão de Fourier para estudar as soluções da Equação de Klein-Gordon num espaço-tempo de Minkowski com topologia de um cilindro. Mostrar que a influência da quinta dimensão no comportamento do campo depende de sua escala (o raio do 'cilindro').

JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

A exigência de que o universo possa ter mais que quatro dimensões do espaço-tempo, surge inicialmente na teoria de Kaluza-Klein com o intuito de unificar a força gravitacional com a força eletromagnética. Com o tempo esta ideia foi deixada de lado, uma vez que a escala de energia necessária para comprovar a existência dessa dimensão extra, está fora do alcance de nossos experimentos. No entanto, nos últimos anos, a ideia de que vivemos em um universo multidimensional foi retomada, e desta vez com o intuito de resolver um dos principais problemas da física teórica da atualidade, o problema da hierarquia. De forma resumida, o problema da hierarquia nada mais é que a enorme diferença entre a escala de Planck (10^{18} GeV) e a escala eletrofraca (10^3 GeV), ou seja, este problema consiste do fato da força gravitacional ser tão mais fraca que as outras forças do modelo padrão. Para se ter uma ideia, a atração gravitacional entre dois elétrons é 10^{-43} vezes mais fraca que a força elétrica entre eles. No cenário das dimensões extras esse problema pode ser resolvido, se admitimos que somente o campo gravitacional seja capaz de se propagar ao longo da dimensão extra, então, as interações gravitacionais no espaço-tempo ordinário pareceriam mais fracas, pois parte das linhas de campo estaria fugindo para as outras dimensões. Os modelos de dimensões extras onde isso ocorre são conhecidos como modelos de branas [6-12].

Portanto, o estudo de modelos de dimensões extras é de fundamental importância para a física teórica, uma vez que ela nos traz a possibilidade de resolver alguns dos principais problemas com o qual a física tem se deparado nos últimos anos. Desta forma, este projeto se insere numa perspectiva mais ampla, que tem como objetivos futuros estudar a dimensionalidade do universo a partir dos diferentes modelos de dimensões extras existentes na literatura. Além

disso, uma vez que nos modelos de branas apenas a gravidade é capaz de se propagar ao longo da dimensão extra, se espera que possamos encontrar traços fenomenológicos destas dimensões nos efeitos gravitacionais gerados por corpos massivos, sendo possível desta forma, medir os efeitos da dimensão extra sobre testes observacionais da Relatividade Geral. Nesse aspecto, a estudo da teoria de Kaluza-Klein deve ser o passo inicial que o aluno deve dar com o objetivo de compreender o problema da dimensionalidade do universo e suas implicações para física teórica.

RELEVÂNCIA DO PROJETO

De um ponto de vista local, este projeto é de fundamental relevância para a Unidade Acadêmica de Engenharia de Produção - UAEP do Centro de Desenvolvimento Sustentável do Semiárido – CDSA, uma vez que ele fortalecerá as atividades de pesquisas do Campus, servindo assim de base para ações de pesquisas futuras no âmbito da física teórica. Desta forma, o aluno do CDSA terá a oportunidade de compreender e de se envolver com alguns aspectos de um tema de pesquisa de grande atualidade na Física de altas-energias: a dimensionalidade do Universo; preparando-o para uma futura pós-graduação na área. Além destes fatos, o presente projeto possui também a finalidade de dar continuidade a um projeto PIBIC que já está em execução intitulado por Eletromagnetismo e Gravitação em dimensões Extras, sendo assim de grande importância para o progresso das pesquisas.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A dimensionalidade do espaço é hoje um tema de grande atualidade e interesse na Física de altas energias. Na verdade, este tema sempre despertou o interesse dos físicos desde o surgimento da teoria de Kaluza-Klein no início do século passado [1,2], quando o mundo científico foi surpreendido com a demonstração teórica de que as forças gravitacional e eletromagnética (mais precisamente, a radiação eletromagnética com um certo vínculo) poderiam ser unificadas por meio da introdução de uma dimensão extra, elevando para cinco, o número total de dimensões do espaço-tempo. No entanto, para tornar a teoria de Kaluza-Klein compatível com os testes experimentais, que obviamente não indicam a existência da quinta dimensão, foi necessário tomar algumas medidas.

Na tentativa de explicar o fato da dimensão extra não ser observada, Kaluza impôs uma restrição a sua teoria denominada de condição cilíndrica. Esta condição exige que a derivada de todas as componentes da métrica 5-dimensional com respeito à quinta dimensão seja nula. No entanto, essa restrição é puramente artificial, uma vez que ela não tem significado físico, e

sua função é impedir a aparição dos efeitos da dimensão extra nas leis físicas [19]. Só em 1926 é que Oscar Klein introduz alguns aperfeiçoamentos na teoria de Kaluza. A contribuição de Klein foi fazer com que a restrição de Kaluza deixasse de ser um argumento puramente matemático e passasse a ter um significado físico. Desta forma, Klein introduz o mecanismo de compactação da dimensão extra, assumindo que a quinta dimensão deveria ter a topologia de um círculo, diferente das demais dimensões que se estendem pelo infinito, e que a escala desta dimensão extra, isto é, o raio deste círculo, deveria ser da ordem do comprimento de Planck (10^{-35} m). Numa escala tão reduzida assim, esta dimensão não seria passível de detecção nem mesmo hoje em dia, uma que vez que supera demasiadamente a acuidade dos mais poderosos instrumentos contemporâneos [3-5, 15].

Uma maneira simples de ilustrar os efeitos da dimensão extra sobre campos físicos é estudar qual a influência a quinta dimensão tem sobre um campo escalar. Devido à topologia, o campo escalar deve ser periódico com relação à dimensão extra (o período estará relacionado ao raio do círculo). Por causa da periodicidade, sabemos que o campo escalar pode ser expandido em uma série de Fourier. Cada modo da expansão terá como coeficiente um campo, que será função apenas das quatro coordenadas ordinárias. Substituindo a série de Fourier na equação de Klein-Gordon, obteremos uma equação para cada modo da expansão [32]. Desta forma, é como se tivéssemos, não mais um único campo (dependente de todas as coordenadas), mas um conjunto (infinito) de campos quadrimensionais interagindo entre si, onde o campo escalar quadrimensional correspondente ao modo zero satisfaz à equação de Klein-Gordon em quatro dimensões [13,14]. Assim, quando outros modos não estiverem excitados, o que acontece em regime de baixa energia, tudo se passará como se o espaço-tempo fosse quadrimensional [1,2].

A principal contribuição da teoria de Kaluza-Klein foi realizar a unificação entre as duas únicas forças conhecidas até então, a gravitacional e a eletromagnética, por supor um universo com cinco dimensões. Posteriormente se descobriu a existência de outras duas forças fundamentais, a força nuclear forte e a força nuclear fraca. Na tentativa de realizar a unificação de todas as forças fundamentais o mecanismo de Kaluza-Klein foi estendido para um modelo com mais de uma dimensão extra, as quais ainda apresentam o caráter de compactação. Um exemplo disto é a teoria das supercordas que exige que o universo tenha 10 dimensões e que é a principal candidata a teoria do tudo [18,19].

Dimensões extras do tipo tempo também podem ser consideradas na Teoria de Kaluza-Klein. A priori, não existem razões pelas quais uma dimensão extra desse tipo não possa existir. O problema com dimensões compacta do tipo tempo, de um ponto de vista de uma teoria de campo de baixas energias, é a existência de modos Tachyonicos [33].

A teoria de Kaluza-Klein inaugurou uma nova fase na Física, em que os cientistas passaram a considerar seriamente a possibilidade de que o mundo pudesse ter dimensões escondidas. Mais recentemente surgiram os modelos de branas [6-12]. Segundo esses novos modelos, as dimensões escondidas não precisariam ser tão pequenas como se presumia na teoria de Kaluza-Klein, mas poderiam ter escalas submilimétrica sem incompatibilidades com os testes experimentais conhecidos. Assim, contrariando o senso comum, que sugere a existência de apenas quatro dimensões (três espaciais e uma temporal) de larga escala, todas essas teorias de dimensões extras, nos mostram que ainda não dispomos de dados suficientes para determinar o número de dimensões do Universo. Em consequência disso, há hoje uma extensa atividade de pesquisa voltada ao estudo desse tema com o propósito de determinar as implicações físicas, sob vários aspectos, advindas da existência das dimensões extras [23,24].

METODOLOGIA

Este trabalho será desenvolvido através da seguinte metodologia: Estudo da teoria da Relatividade Restrita de Einstein. Revisão da Mecânica Quântica Ondulatória. Estudo da Equação de Klein-Gordon para um campo escalar. Por fim estudaremos a Teoria de Kaluza-Klein. A metodologia seguirá as seguintes etapas:

1. Estudo da Relatividade Restrita.

Esta etapa do trabalho será realizada por meio de um estudo profundo da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, incluindo neste estudo a dinâmica relativística. Abordaremos conceitos importantes como a invariância de Lorentz e diagramas do espaço tempo. Com o intuito de visualizar os impressionantes efeitos que a geometria do espaço-tempo exerce sobre os fenômenos físicos, iremos analisar três experimentos “mentais”, a saber: dilatação do tempo, contração de Lorentz e a relatividade da simultaneidade [16,22, 25-31].

Veremos ainda que a Relatividade Restrita de Einstein e a Eletrodinâmica clássica de Maxwell se relacionam dando origem ao que conhecemos por Eletrodinâmica Relativística [23].

Uma vez concluída esta etapa, passaremos ao estudo da equação Klein-Gordon que é a equação de movimento relativística para um campo escalar.

2. Mecânica Quântica

Com o Objetivo de verificar quais os efeitos gerados pelas dimensões extras compactas sobre os problemas clássicos da mecânica quântica, como por exemplo o poço de potencial, iremos realizar uma breve revisão da mecânica quântica ondulatória, estudando a equação de Schrodinger.

3. Equação de Klein-Gordon

Como desejamos discutir quais são as implicações físicas que dimensão extra na teoria de Kaluza-Klein gera nos campos físicos, devemos inicialmente estudar qual o comportamento relativístico desses campos. Para isso se faz necessário estudar a equação de Klein-Gordon. Realizaremos este estudo para o caso mais simples, ou seja, com um campo escalar real em (3+1) dimensões e posteriormente estenderemos este estudo para um espaço-tempo com cinco dimensões [13-15,32].

4. Relatividade Restrita com Dimensão extra.

Nesta parte do trabalho iremos realizar uma generalização da invariância de Lorentz para um espaço-tempo com uma dimensão extra. Com intuito de ilustrar os efeitos que essa dimensão compactada gera no espaço-tempo, nós iremos considerar o caso de um Universo unidimensional e por fim utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão, vamos estudar o caso de uma partícula presa em um poço de potencial infinito unidimensional, analisando quais as correções geradas no espectro de energia da partícula devido à existência da dimensão extra [18, 21].

5. Teoria de Kaluza-Klein

No estudo do modelo de Kaluza-Klein, faremos uso do conhecimento adquirido nos estágios anteriores desse projeto. Iniciaremos com o caso de um campo escalar real.

Usando a densidade de Lagrangeana apropriada para o campo escalar no espaço-tempo de Minkowski em cinco dimensões, podemos agora resolver as equações de movimento para o campo escalar, de onde iremos obter a equação de Klein-Gordon. Por simplicidade iremos considerar a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa. Uma vez que a dimensão extra tem a topologia de um círculo, qualquer campo será periódico com respeito à quinta coordenada. Desta forma, todos os campos podem ser expandidos em séries de Fourier [32]. Resolvendo portando a equação de Klein-Gordon, verificaremos que o campo escalar será decomposto em um modo zero que satisfaz a equação de Klein-Gordon em quatro dimensões e num conjunto de modos massivos que chamaremos genericamente de modos de Kaluza-Klein (modos KK) [1-5].

Veremos que cada modo KK carrega uma energia inversamente proporcional ao raio da dimensão extra, logo, não podem ser excitados em processos de baixas energias [1,2].

CRONOGRAMA

ETAPAS	MESES											
	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
1. ESTUDO DA RELATIVIDADE RESTRITA E MEC. QUÂNTICA.	X	X	X	X	X	X						
2. EQ. DE KLEIN-GORDON						X	X					
2. RELATIVIDADE RESTRITA COM DIMENSÕES EXTRAS							X	X				
3. TEORIA DE KALUZA-KLEIN								X	X	X		
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES							X	X	X	X	X	X
5. RELATÓRIO FINAL											X	X

Detalhamento das etapas

- *Relatividade Restrita e Mecânica Quântica (6 meses):*

Considerando que o campo escalar de Klein-Gordon é um campo relativístico, faz-se necessário que, inicialmente, o bolsista tenha um contato com a teoria da Relatividade Restrita. Procuraremos enfatizar a formulação 'geométrica' da teoria, destacando os seguintes tópicos: Princípio da Relatividade, diagrama do espaço-tempo, invariância do intervalo espaço-tempo, transformações de Lorentz, Momento e Energia, espaço-tempo de Minkowski, métrica, Eletrodinâmica Relativística. Após esta fase, Faremos uma breve revisão da mecânica quântica por meio do estudo da equação de Schrodinger e suas soluções

- *Equação de Klein-Gordon (2 meses):*

O conceito de campo escalar será introduzido e iniciaremos o estudo da equação de movimento de Klein-Gordon.

- *Relatividade Restrita no espaço-tempo com uma dimensão extra compacta (3 meses):*

Com o intuito de verificar quais as influências que uma dimensão extra compacta gera ao comportamento do campo escalar e do campo de gauge na equação de Klein-Gordon estudaremos os efeitos da dimensão extra compacta na Relatividade Restrita. Tentaremos entender o que é uma dimensão extra compacta e com o intuito de ilustrar sua influência, iremos estudar o caso de um universo unidimensional que possui a topologia de um círculo de raio l .

Após este estudo, revisaremos um problema clássico da mecânica quântica, uma partícula presa em poço quadrado infinito unidimensional. Considerando a equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão, verificaremos quais as mudanças que a dimensão extra gera no espectro de energia da partícula.

- *Comportamento de um campo escalar real e de campos de gauge num espaço-tempo com uma dimensão extra compacta (modelo do tipo Kaluza-Klein) (3 meses):*

Nessa etapa do projeto, nos concentraremos no estudo de equação de Klein-Gordon num espaço-tempo de Minkowski em cinco dimensões, admitindo que a dimensão extra tenha topologia de um círculo. Aplicaremos o método de expansão em série Fourier para resolver a equação de Klein-Gordon. Analisaremos a influência da quinta dimensão compacta sobre o comportamento do campo e do gauge.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KALUZA, T. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 966 (1921)
- [2] KLEIN, O. Z. Phys, 37, 895 (1926).
- [3] DUFF, M. J.; NILSON, B.; POPE, C. Phys. Rep. 130 (1996)
- [4] DUFF, M. J. Kaluza-Klein Theory in Perspective. hep-th/9410046.
- [5] BAILIN, D.; LOVE, A. Phys. Rep. 50, 1087 (1987)
- [6] ARKANI-HAMED, N.; DVALI, DIMOPULOS, Phys. Lett. B 429, 263 (1998)
- [7] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. "4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space". Phys.Lett.B485:208-214, 2000.
- [8] GABADADZE, G., ICTP Lectures on Large Aextra Dimensions, hep-ph/0308112

CERN-TH-2003-157.

- [9] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Phys Rev. Lett., 83, n17, 3370 (1999)
- [10] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Phys Rev. Lett., 83, n23, 4690, (1999)
- [11] RUBAKOV, V. A.; Shaposhnikov, M. Phys. Lett. B 125, 136, (1983).
- [12] RUBAKOV, V. A. hep-ph/0104152.
- [13] BJORKEN, J.D.; DRELL, S. D. Relativistic Quantum Mechanics McGraw-Hill Book Company.
- [14] GREINER, W. Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations 3a edição Springer.
- [15] KAKU, Michio Quantum Field Theory A modern introduction. Oxford University Press.
- [16] D.INVERNO, R. Introducing Einstein's Relativity, Oxford University Press.
- [17] SILVA, Alex de Albuquerque. Um estudo sobre dimensões extras. Dissertação de Mestrado, Campina Grande, 2009.
- [18] ZWIEBACH, B. A First Course in String Theory Cambridge University Press, 2004.
- [19] OVERDUIN, J. M.; WESSON, P.S. Phys.Rept.283:303-380,(1997).
- [20] GRIFFITHS, D.J. Introduction to Eletrodynamics. 3ª ed. Prentice Hall, 1999.
- [21] GRIFFITHS, D.J. Introduction to Quantum Mechanics. 3ª ed. Prentice Hall, 1999.
- [22] FORSTER, J.; NIGHTGALE, J.D. A Short Course in General Relativity, 3ª ed. Spring, 2006.
- [23] HOYLE, C.D. et al. Phys. Rev. Lett. 86, 1418 (2001).
- [24] HOYLE, C.D. et al, Phys.Rev.D70:042004, (2004).
- [25] ELLIS, G.; WILLINS, R. Flat and Curved Spacetimes (Oxford Univ. Press 1988).
- [26] LESCH, B. Teoria da Relatividade, Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [27] WALD, R.M. General Relativity, (Chicago Univ. Press 1984).
- [28] RESNICK, R. Introduction to Special Relativity, John Wiley, New York, 1968.
- [29] TAYLOR, E.F.; WHEELER, J.A. Spacetime Physics. Freeman and Company, 1963.
- [30] BERGMANN, P. G. Introduction to the theory of Relativity. Dover 1976.
- [31] MISNER, C.W. THORNE, K.S. WHEELER, J.A. Gravitation. Freeman and Company, 1973.
- [32] ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. Mathematical Methods for Phycists 6a edição.
- [33] DVALI, G.; GABADADZE, G.; SENJANOVIC, G. hep-ph/9910207.